Universidad Nacional de Asunción

Colegio Experimental Paraguay – Brasil

Disciplina: Matemática – 3er Curso T – Prof.: Lic. Teresa Bogado – Marzo 2020 –

Ejerctario Nro 3

Se desarrolla en el cuaderno con orden y pulcritud.

Descomposición de un polinomio en factores por el método de evaluación

En la **divisibilidad entre x - *a*** (ver → 101) se demuestra que si un polinomio entero y racional en **x** se anula para $x = a$, el polinomio es divisible entre $x - a$. Aplicaremos ese principio a la descomposición de un polinomio en factores por el **método de evaluación**.

1. Descomponer por evaluación $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - x - 2}$
   Los valores que daremos a x son los valores del término independiente 2 que son +1, -1, +2 y -2. Veamos si el polinomio que se anula para $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, y si se anula para alguno de estos valores el polinomio será divisible entre x menos ese valor. **Aplicando la división sintética** veremos si el polinomio se anula para estos valores de x y simultáneamente hallamos los coeficientes del cociente de la división. En este caso tendremos:

Coeficientes del polinomio

1	+2	-1	-2	+1	$x = 1$
	1 x 1 = +1	3 x 1 = +3	2 x 1 = +2		
1	+3	+2	0		

Coeficientes del cociente

El residuo es 0, o sea que el polinomio dado se anula para $x = 1$, luego es divisible entre $(x - 1)$.
Dividiendo $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x - 1$ el cociente será de segundo grado, y sus coeficientes 1, 3 y 2, luego el cociente es $x^2 + 3x + 2$, y como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

$$\text{(factorizando el trinomio)} = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

2- Descomponer por evaluación $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}$
Los factores de 12 son ±(**1, 2, 3, 4, 6, 12**)

Pruebas

Coeficientes del polinomio

1	-3	-4	+12	+1	$x = 1$
	1 x 1 = +1	(-2) x 1 = -2	(-6) x 1 = - 6		
1	-2	-6	+6		

El residuo es 6, luego el polinomio no se anula para $x = 1$, y no es divisible entre $(x - 1)$.

Coeficientes del polinomio

1	-3	-4	+12	-1	$x = -1$
	1 x (-1) = -1	(-4) x -1 = +4	0 x (-1) = 0		
1	-4	0	+12		

El residuo es 12, luego el polinomio no se anula para $x = -1$, y no es divisible entre $x - (-1) = x + 1$.

1	-3	-4	+12	+2	$x = 2$
	1 x 2 = +2	(-1) x 2 = -2	(-6) x 2 = -12		
1	-1	-6	0		
	Coeficientes del cociente				

El residuo es 0, luego el polinomio dado se anula para $x = 2$, y es divisible entre (x - 2).
El cociente de dividir el polinomio dado $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ entre $x - 2$ será de segundo grado y sus coeficientes son 1, -1, -6, luego el cociente será $x^2 - x - 6$.
Por tanto:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$$
$$\text{(factorizando el trinomio)} = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

3- Descomponer por evaluación $\mathbf{x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24}$
Los factores de 24 son (**1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24**).

Pruebas

Coeficientes del polinomio

1	-1	-7	-7	+22	+24	+1	$x = 1$
	+1	0	-7	-14	+ 8		
1	0	-7	-14	+ 8	+32	no se anula	

1	-1	-7	-7	+22	+24	-1	$x = -1$
	-1	+2	+5	+ 2	-24		
1	-2	-5	-2	+24	0		

Coeficientes del cociente

Se anula para $x = -1$, luego es divisible entre $x + 1$.

El cociente será $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, luego:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 1)(x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24) \qquad \mathbf{(1)}$$

Ahora descomponemos $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24$. Se prueba nuevamente $x = -1$.

Coeficientes del polinomio

1	-2	-5	-2	+24	-1	$x = -1$
	-1	+3	+2	0		
1	-3	-2	0	24	no se anula	

1	-2	-5	-2	+24	+2	$x = 2$
	+2	0	-10	-24		
1	0	-5	-12	0		

Coeficientes del cociente

Se anula para $x = 2$, luego $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ es divisible entre $x - 2$
El cociente es $x^3 - 5x - 12$, luego:

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x - 2)(x^3 - 5x - 12)$$

Sustituyendo esta descomposición en **(1)**, tenemos:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 1)(x - 2)(x^3 - 5x - 12) \quad \textbf{(2)}$$

Ahora descomponemos $x^3 - 5x - 12$. Se prueba nuevamente $x = 2$, y se pone cero en el lugar correspondiente a la x^2 que falta. Tendremos:

Coeficientes del polinomio					
1	0	-5	-12	+2	$x = 2$
	+2	+4	-2		
1	+2	-1	-14	no se anula	

1	0	-5	-12	-2	$x = -2$
	-2	+4	+2		
1	-2	-1	-10	no se anula	

1	0	-5	-12	+3	$x = 3$
	+3	+9	+12		
1	+3	+4	0		
Coeficientes del cociente					

Se anula para $x = 3$, luego $x^3 - 5x - 12$ es divisible entre $x - 3$. El cociente es $x^2 + 3x + 4$, luego:

$$x^3 - 5x - 12 = (x - 3)(x^2 + 3x + 4)$$

Sustituyendo esta descomposición en **(2)**, tenemos:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 3x + 4)$$

(El trinomio $x^2 + 3x + 4$ no tiene descomposición).

Ejercicios

1−) $x^3 + x^2 - x - 1 =$

2−) $x^3 - 4x^2 + x + 6 =$

3−) $a^3 - 3a^2 - 4a + 12 =$

4−) $m^3 - 12m + 16 =$

5−) $2x^3 - x^2 - 18x + 9 =$

6−) $a^3 + a^2 - 13a - 28 =$

7−) $x^3 + 2x^2 + x + 2 =$

8−) $n^3 - 7n + 6 =$

9−) $x^3 - 6x^2 + 32 =$

10-) $6x^3 + 23x^2 + 9x$-18=

11-) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 =$

12−) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 =$

13-) $a^4 - 15a^2 - 10a + 24 =$

14−) $n^4 - 27n^2 - 14n + 120 =$

15–) $x^4 + 6x^3 + 3x + 140 =$

Respuestas:

1. $(x-1)(x+1)^2$
2. $(x+1)(x-2)(x-3)$
3. $(a-2)(a+2)(a-3)$
4. $(m-2)^2(m+4)$
5. $(x-3)(x+3)(2x-1)$
6. $(a-4)(a^2+5a+7)$
7. $(x+2)(x^2+1)$
8. $(n-1)(n-2)(n+3)$
9. $(x+2)(x-4)^2$
10. $(x+3)(3x-2)(2x+3)$
11. $(x-1)(x+1)(x-2)^2$
12. $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$
13. $(a-1)(a+2)(a+3)(a-4)$
14. $(n-2)(n+3)(n+4)(n-5)$
15. $(x+4)(x+5)(x^2-3x+7)$