UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

Colegio Experimental Paraguay - Brasil

Comandante Gamarra y Gobernador Irala (Itápytapunta)

Teléfonos: 423315 - 423320 –Fax: 425888

E-mail: colegio@cepb.una.py

Asunción – Paraguay

MATEMATICA 1er Curso Sección A.

Considerando la función exponencial $y = 2^x$, dándole algunos valores a x, tenemos.

x	2^x	y
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$	1
1	$2^1 = 2$	2
2	$2^2 = 4$	4

Observamos que, en la función exponencial del ejemplo dado, para cada valor de **x** es fácil encontrar el valor de **y** correspondiente.

Supongamos que deseamos calcular el valor del exponente **x** cuando el valor de **y** es igual **32**, es decir, $32 = 2^x$. El valor de **x** que satisface esta expresión es **5**.

Al exponente **5** llamamos el logaritmo de **32** en base **2** y se expresa $\mathbf{\log_2 32}$

$32 = 2^5 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

En forma general: $b = a^x \Leftrightarrow \log_a b = x$, vemos la forma exponencial ⟺ forma logarítmica.

Definición: El logaritmo de un número real y positivo **b**, en base **a**, positiva y diferente de 1 es el número **x** al cual se debe elevar la base **a** para obtener **b**.

$b = a^x \Leftrightarrow \log_a b = x$ (b > 0 y 1 ≠ a > 0)

Consecuencias de la definición.

a) $\log_a 1 = 0$ ejemplo: $\log_5 1 = 0.$
b) $\log_a a = 1$ ejemplo: $\log_3 3 = 1.$
c) $\log_a a^m = m$ ejemplo: $\log_2 2^3 = 3.$
d) $\log_2 x = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 x = 2\ por\ lo\ tanto\ x = 4.$ En general: $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c.$

Ejemplo: calcular el valor de x en la igualdad $\log_5(x-1) = \log_5 7$.

Solución: Como las bases son iguales $\log_5(x-1) = \log_5 7 \Rightarrow x - 1 = 7$

$x = 8$

Sistema de logaritmos decimales.

En el sistema de base 10 o de Briggs, se tiene que $\log_{10} x = \log x$.

Condiciones de existencia de los logaritmos.

Para que los logaritmos siempre existan, debemos tener en cuenta lo siguiente: $\log_a b$, b > 0, a > 0 y a ≠ 1.

Ejemplos:

1) Determinar el dominio de la función $f(x) = \log_3(x-5)$

Solución: indicamos la condición de existencia: $(x-5) > 0$. Como la base es 3 (positiva y diferente de 1) resolvemos la condición impuesta: $(x-5) > 0 \Longrightarrow x > 5$. El dominio es igual a x que pertenece al conjunto de los números reales, tal que x sea mayor que 5.

2) Determinar el campo de existencia de $y = \log_{(m-2)} 7$.

Solución: condición de existencia: $m-2 > 0 \;\; y \;\; m-2 \neq 3$

$m-2 > 0 \qquad\qquad m-2 \neq 1$
$m > 2 \qquad\qquad\quad m \neq 3$
$D = \{m \in R \;\, / \, m > 2 \, y \, m \;\neq 3\}$

Ecuaciones logarítmicas.

Resolver una ecuación logarítmica es determinar el valor o los valores de la incógnita.

Para resolver una ecuación logarítmica debemos tener en cuenta el siguiente método.

1) Indicamos la condición de existencia (CE)
2) Resolvemos la ecuación
3) Verificamos las soluciones de la ecuación en las condiciones de existencia.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación $\log_4 x = 2$

Solución: CE (x > 0)

$\log_4 x = 2 \;\Longrightarrow x = \; 4^2 \;\; por\ lo\ tanto\ x = 16.$

Verificación: x > 0 ⟹ $16 > 0\ (verdadero)$

2) Resolver la ecuación $\log_x 81 = 4$

Solución: CE: x > 0 y x ≠ 1.

$\log_x 81 = 4 \quad \Longrightarrow \quad 81 = x^4$
$x = \pm\sqrt[4]{81}$
$x = \pm\, 3$

Verificación: para x = 3, 3 > 0 por lo tanto es verdadero; para x = -3, -3 > 0 es falso.
Respuesta: x = 3.

Ejercicios de aprendizaje.

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ b) $\log_3 \frac{x+3}{x-1} = 1$ c) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = -2$ d) $\log_x 16 = -2$

2. Resuelve la ecuación y verifica las soluciones.

a) $\log_{12}(x^2 - x) = 1$ b) $\log_4(-x^2 + 5x) = \log_4 6$ c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) = -4$

d) $log_3^2 x - 6\log_3 x + 9 = 0$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

1. LOGARITMO DE UN PRODUCTO. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos tomados en la misma base, es decir: $\boxed{\mathbf{\log_a(p\ .\ q) = \log_a p + \log_a q}}$
2. LOGARITMO DE UN COCIENTE. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador tomados en la misma base, es decir: $\boxed{\mathbf{\log_a\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a p - \log_a q}}$
3. LOGARITMO DE UNA POTENCIA. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia, es decir: $\boxed{\mathbf{\log_a p^n = n\ .\ \log_a p}}$
   Caso particular $\boxed{\mathbf{\log_a \sqrt[n]{p} = \log_a p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a p}}$

ECUACIONES QUE PUEDEN RESOLVERSE APLICANDO LAS PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

Ejemplo 1. Resuelve la ecuación: $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$

Solución: $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$

$\log_2(x+2)(x-2) = 5 \longrightarrow (x+2)(x-2) = 2^5 \longrightarrow (x^2-4) = 32 \longrightarrow x^2 = 36 \Longrightarrow x = \pm 6$

Verificación: el valor negativo -6 no verifica la ecuación $\log_2(-6+2) + \log_2(-6-2)\ no\ existe$, el valor positivo +6 si verifica la ecuación por tanto es la solución.

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación: $\log_2(x-8) - \log_2(x+6) = 3$

Solución: $\log_2(x-8) - \log_2(x+6) = 3$

$\log_2 \frac{(x-8)}{(x+6)} = 3 \longrightarrow \frac{(x-8)}{(x+6)} = 2^3 \longrightarrow \frac{(x-8)}{(x+6)} = 8 \longrightarrow (x-8) = 8\,(x+6) \longrightarrow (x-8) = 8x + 48$

$7x = -56 \Longrightarrow x = -8$

Verificación: el valor negativo -8 no verifica la ecuación $\log_x(-8-8) - \log_2(-8+6) no\ existe$, por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 3. Resuelve la ecuación: $2\log_7 x = \log_7 3x + \log_7 6$

Solución: $2\log_7 x = \log_7 3x + \log_7 6$

$\log_7 x^2 = \log_7(3x\ .\ 6) \longrightarrow \log_7 x^2 = \log_7 18\,x \longrightarrow x^2 = 18\,x \longrightarrow x^2 - 18x = 0$

$x(x-18) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0\ \ y\ \ x_2 = 18$

Verificación: el valor 0 no verifica la ecuación por condición de existencia de logaritmos. La solución es x = 18.

Ejercicios de aprendizaje.

Resuelve la ecuación:

a) $\log_2(x+3) + \log_2(x-4) = 3$ b) $\log_2(x+7) - \log_2(x-11) = 2$

c) $\log_{\sqrt{2}}(2x+1) - \log_{\sqrt{2}}(5x+2) = 2$ d) $\log(x+4) + \log(x-4) - 2\log 3 = 0$